C'ERA UNA VOLTA UN PI, DETTO GRECO

C'era una volta uno strano tipo. Si definiva un numero, ma quando si spostava da una parte all'altra si tirava appresso una scia lunghissima di cifre che sembrava non finire mai.
Era sempre arrabbiato perché pochissimi, anzi forse si può dire proprio nessuno, riusciva esattamente a nominarlo … hai voglia, era talmente lungo!
Così lo chiamavano spesso con dei diminutivi, che a lui non piacevano; ma uno in particolare non gli andava proprio giù: "tre e quattordici".
Era quello che gli dava più fastidio … neanche si sprecavano a dire che c'era la virgola dopo il tre, uffi !!!!

Invece gli piaceva tanto quando lo chiamavano "pi", soprattutto quando poi aggiungevano quell'aggettivo, "greco", che gli dava un senso di antico e misterioso… anche se non capiva come mai si dovesse leggere "pi greco" una cosa fatta così

$$\pi$$

A π non piaceva essere chiamato "tre e quattordici", ma quando gli dissero che era stato scelto un giorno speciale a lui dedicato, proprio a lui, la cosa certo lo riempì di orgoglio: il 14 del mese di marzo tutto il mondo lo avrebbe per sempre festeggiato.
Eh, sì, nelle date dei paesi di lingua anglosassone il mese precede il giorno e la data 3/14 individua proprio il 14 del mese di marzo, ma rappresenta anche le prime tre tra le infinite cifre del nostro π : 3,14.

Sarebbe bello allora trovare qualche altra cifra di π, e chissà che finalmente possa sentirsi meglio quando ci rivolgiamo a lui.

Forse chiedendo aiuto alla simulazione statistica, di cui abbiamo parlato in qualche post precedente, qualcosa di buone ne potrebbe uscire.
In particolare, si potrebbe ricorrere a una tra le tante **tecniche di simulazione di Montecarlo**, magari quella dell'IN/OUT; è vero che si tratta di un insieme di tecniche che poggiano su complessi concetti matematici e statistici (che qui non vogliamo approfondire, non ci pensiamo proprio!!!), ma quella scelta risulta così semplice ed intuitiva nella sua applicazione, da poter essere realizzata non solo con applicazioni informatiche, ma anche unplugged.

Come ogni altra tecnica di simulazione richiede di ricostruire un aspetto della realtà e in questo caso la superficie di un cerchio.

Vi chiederete, ma cosa c'entra un cerchio con π?

Ebbene, mettiamoci in una situazione particolare, e vedrete come c'entrerà … oltre che centrare (hahahaha).

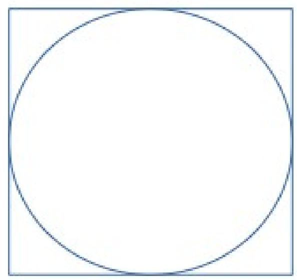
Immaginiamo allora il cerchio come un bersaglio verso il quale lanciare delle freccette che lo potranno colpire su tutta la sua superficie in base alla bravura del lanciatore … una schiappa potrebbe addirittura far cadere la freccetta a lato del bersaglio!!!!

All'aumentare del numero di persone, con abilità molto diverse l'una dall'altra, ben presto potrà accadere che sul bersaglio non vi sia più posto: le freccette lanciate lo avranno ricoperto e in più potranno esserci delle freccette cadute a terra per non essere andate a segno.

Usiamo ancora la fantasia e proviamo a immaginare che le freccette in realtà siano dei piccoli puntini che lasciano una traccia colorata sulla superficie del cerchio.

Ecco, questo si intende quando si parla di simulazione come ricostruzione della realtà: l'insieme di quei puntini colorati rappresenta la ricostruzione del cerchio e tale ricostruzione sarà via via migliore quanto più numerosi e ravvicinati saranno i puntini. Se un puntino/freccetta non dovesse più trovare posto nel cerchio, sarà perché la superficie è stata completamente ricostruita.

Partiamo quindi dall'idea di disegnare un cerchio inscritto in un quadrato e se consideriamo il raggio del cerchio come unità di misura, allora il quadrato ha il lato che misura 2 e la sua area vale 4.



Disegnando i puntini colorati di cui abbiamo parlato prima in modo da rimanere sempre dentro il quadrato sarà possibile contare tra tutti i puntini disegnati quanti sono caduti esattamente dentro il cerchio.
E qui un po' di matematica ci serve perché dobbiamo ricorrere a una proporzione:

area quadrato : area cerchio = puntini totali : puntini nel cerchio

e con pochi passaggi algebrici, ebbene sì, si ottiene:

$$area\,cerchio = \frac{area\,quadrato * puntini\,nel\,cerchio}{puntini\,totali} = \frac{4 * puntini\,nel\,cerchio}{puntini\,totali}$$

Proviamo a fare delle prove, magari prendendo una scatola quadrata e disegnando internamente una circonferenza perfettamente inscritta.
Ora, possiamo fare in tanti modi:
- usare un pennarello, chiudere gli occhi e segnare tanti puntini nel fondo della scatola
- oppure prendiamo una manciata di perline e la facciamo cadere all'interno della scatola in modo del tutto casuale

- o ancora al posto delle perline usiamo quella pastina piccola piccola che piace tanto ai bimbi.
Qualsiasi sia il modo scelto, a questo punto dobbiamo contare quanti puntini/perline/pastine abbiamo in totale nella scatola e quanti sono quelli caduti nel cerchio.
Prendiamo nota in una tabella, perché sarà importante provare con quantità maggiori di puntini/perline/pastine.
Ricordiamoci anche di applicare la formula vista prima per approssimare l'area del cerchio.

N° perline totali	N° perline nel cerchio	Approx area cerchio
10	7	2,8
...	...	...
100	78	3,12

Interessante l'ultimo risultato, vero? Le avete riconosciute? Le prime due cifre, 3 e 1, non sono proprio le due prime cifre di π ?!?!
Per trovare altre cifre dovremmo aumentare molto il numero di puntini/perline/pastine, ma purtroppo questo metodo diventa poco efficiente perché è legato alla dimensione delle puntini/perline/pastine e alla dimensione della scatola.

E allora, non ci resta che chiedere aiuto alla tecnologia informatica.

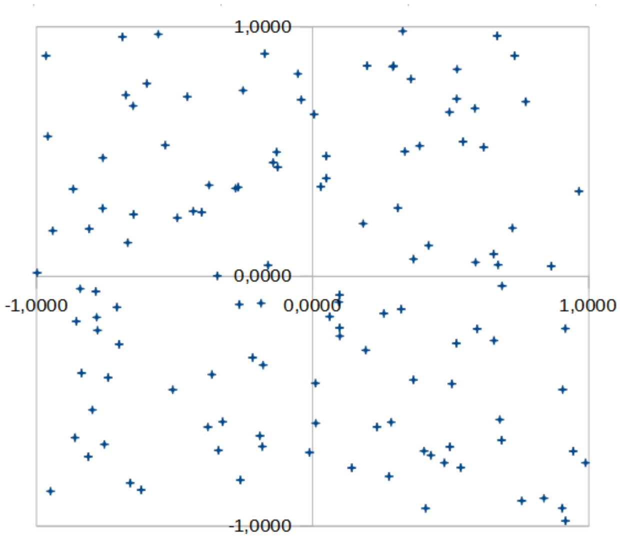
Prendiamo quindi un foglio di calcolo, meglio di CALC di LibreOffice … a noi il software open source piace sempre tanto ;-)
Costruiamo le formule per disegnare punti in un quadrato di lato 2, come se fosse la nostra scatola di prima; per semplicità sistemiamo il quadrato in modo che il suo centro corrisponda all'origine degli assi cartesiani di riferimento e quindi le formule per trovare le coordinate (x,y) dei punti disposti in modo casuale nel quadrato sono:

	A	B
1	x	y
2	=CASUALE()*2-1	=CASUALE()*2-1
3		
4		
5		

Copiando le due formule in un numero imprecisato di celle delle due colonne A e B otteniamo:

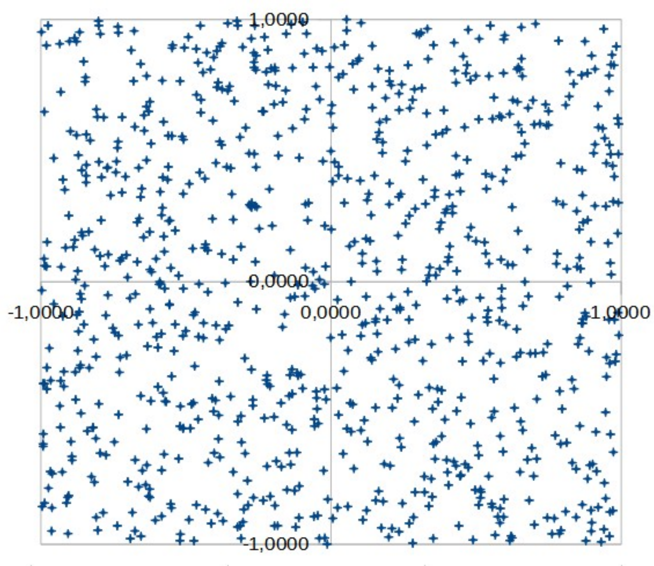
	A	B
1	x	y
2	-0,7975	-0,5348
3	0,9647	0,3410
4	-0,1910	-0,6384
5	-0,8605	-0,6455
6	0,2907	0,8402
7	0,5956	-0,2102
8	0,0980	-0,2058
9	0,7575	-0,8987
10	-0,9974	0,0144
11	0,6567	-0,2568
12	-0,6501	0,6830
13	-0,8417	-0,0496
14	0,4095	-0,9287
15	-0,1610	0,0444
16	-0,1429	0,4562
17	0,8644	0,0410
18	0,0952	-0,1027
19	-0,5999	0,7723
20	0,0978	-0,0744
21	-0,3445	0,0024
22	-0,2695	0,3570

E ora, rappresentando in un grafico a dispersione i punti generati in modo casuale, otteniamo:



Proprio come quando li disegnavamo con il pennarello nella scatola!!!

Ovviamente, più punti si "sparano" (ops, niente paura, è un gergo tipicamente statistico e non militare!!!) sul piano, più copertura vi sarà della superficie del quadrato; quelli di prima erano circa 120 ed ecco invece con 1000 punti cosa accade:

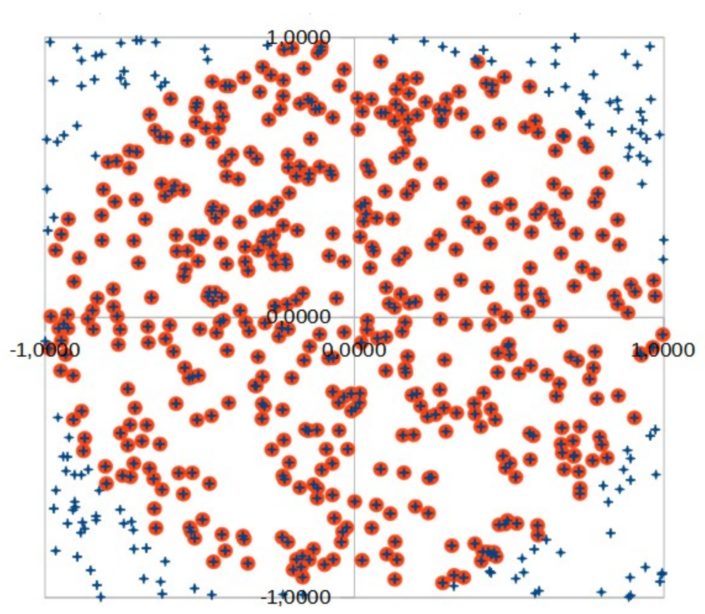


Ora, anche senza disegnare la circonferenza (cosa purtroppo non così semplice con il foglio di calcolo!!! di certo non come prendere un compasso, puntarlo e girare), possiamo ricavare i punti "sparati" che stanno dentro il cerchio inscritto, che per ora è solo immaginario, cioè quei punti che distano dal centro del quadrato meno di 1 e lo facciamo ricorrendo al teorema di Pitagora … che tipo ‘sto Pitagora … ma non era greco, lui ... vero?

	A	B	C	D
1	x	y	punti cerchio	
2	-0,0963	-0,4902	=SE(RADQ(A2^2+B2^2)<1;B2;"")	
3	0,9447	-0,6675		

	A	B	C
1	x	y	punti nel cerchio
2	-0,4406	-0,8465	-0,8465
3	-0,8599	-0,3990	-0,3990
4	-0,5588	0,9721	
5	0,2734	0,6476	0,6476
6	0,6493	-0,0158	-0,0158
7	-0,5431	0,7508	0,7508
8	0,8859	-0,9291	
9	0,7032	0,1835	0,1835
10	0,5617	-0,9265	
11	0,3398	0,0748	0,0748
12	-0,9619	-0,8956	
13	0,0809	0,8911	0,8911
14	0,3451	-0,5231	-0,5231
15	-0,2744	-0,0020	-0,0020
16	-0,8446	0,3209	0,3209
17	0,4020	0,4801	0,4801
18	-0,7240	-0,4468	-0,4468
19	0,3169	0,3537	0,3537
20	-0,8193	-0,6019	
21	-0,8457	0,6874	
22	0,1450	0,6906	0,6906
23	-0,5959	0,2216	0,2216
24	0,0910	0,7052	0,7052
25	0,9732	-0,0090	-0,0090

Rappresentiamo questi punti con un altro colore e con una diversa icona così da metterli bene in evidenza:



Eh sì, si vede bene che quelli rossi stanno proprio dentro il cerchio!!!!

Ora utilizziamo le seguenti formule per calcolare il numero totale dei punti sparati (cioè quelli presenti nella colonna B), di questi quanti cadono nel cerchio (quelli presenti nella colonna C), e l’approssimazione dell’area del cerchio:

E	F
numero punti totali	=CONTA.NUMERI(B:B)
numero punti nel cerchio	=CONTA.NUMERI(C:C)
area approssimata cerchio	=4*F4/F2

G	H
numero punti totali	5000
numero punti nel cerchio	3927
area approssimata cerchio	3,1416

Sembra incredibile, ma con 5000 punti sparati e 3927 che cadono nel cerchio, troviamo una nuova cifra del nostro amico: dopo 3 e 1 e 4 c’è ancora un 1 … e quel 6 è abbastanza vicino a quella che dovrebbe essere la prossima cifra giusta, cioè un 5.

E chissà cosa potremmo trovare sparando ancora più punti, tanto è davvero facile e veloce da fare con CALC perché basta copiare le formule già scritte su un numero di celle maggiore.

Oh, che sbadata, non lo avevo ancora detto … cosa c’entra il cerchio con il nostro amico: se, come abbiamo ipotizzato all’inizio della nostra costruzione, il raggio della circonferenza viene preso come unità di misura, allora la superficie del cerchio vale proprio Pi Greco ...

… o meglio π

PS
Una precisazione va però fatta: le coordinate dei punti sono state realizzate con la funzione casuale() di CALC, la quale fornisce nuovi valori ad ogni ricalcolo del foglio, cioè ogni volta che viene digitato il tasto F9. Quindi saranno necessari più ricalcoli per ottenere il valore approssimato mostrato nella nostra storia. Potrà invece accadere che più volte il risultato ottenuto sia anche molto distante da quello che ci si aspetta. Quello che accade per certo è che all'aumentare del numero dei punti sparati via via si trovino cifre decimali che rimangono sempre più spesso costanti, cioè che si stabilizzano … ma qua la storia dovrebbe prendere un'altra piega, un po' troppo impegnativa 🤷‍♀️👋